Ueber elliptische Bewegung.

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Hohen philosophischen Fakultät der Universität Marburg

eingereicht von

Richard Wirth
aus Frankfurt a. M

Marburg.
1890.

Ueber elliptische Bewegung.

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Hohen philosophischen Fakultät der Universität Marburg

eingereicht von

Richard Wirth
aus Frankfurt a. M

Marburg.
1890.

Unter elliptischer Bewegung soll hier diejenige Verschiebung einer beweglichen Ebene in einer ruhenden Ebene verstanden werden, bei welcher wenigstens ein Punkt der ersteren in der letzteren ein Ellipse beschreibt. Es sollen nur die zwei einfachsten dieser Bewegungen behandelt werden, welche durch Rollen eines Kreises in einem von doppelt so großem Durchmesser, Cardanproblem, und durch Rollen einer Cykloide auf einer Geraden, Aronhold's Problem, gegeben sind. Die Untersuchung wird also die Hälften zweier vollständiger phoronomischer Aufgaben umfassen, deren andere, durch Umkehrung der Bewegung entstehenden Hälften nach demselben Benennungsprinzip etwa als eine cardioidische und eine cykloidische Bewegung zu bezeichnen wären.

Da die Untersuchung sich nicht in den Grenzen der Phoronomie allein hält, sondern auch in Beziehung zur Geometrie und Kinematik tritt, somit drei Gebiete beschreitet, deren scharfe begriffliche Sonderung sich als nothwendig herausgestellt hat,*) so ist es angezeigt, in einem kurzen Ueberblick über die behandelten Stoffe auch auf die Verschiedenartigkeit der angewandten Untersuchungsweisen wenigstens so hinzudeuten, dafs Verwirrungen vorgebeugt wird und sie sowohl wie die erhaltenen Resultate übersichtlich geordnet neben einander erscheinen.

Ehe in die Untersuchung eingetreten wird, sind zwei Hülfsmittel derselben anzugeben. Das erste besteht in der Aufstellung einer Kurve, welche von allgemeinerer Bedeutung für phoronomische Untersuchungen ist. Es ist die Kurve, welche bei einer bestimmten ebenen Bewegung in der beweglichen Ebene gelegen aus der Evolute einer bestimmten Punktbahn den jeweiligen Krümmungsmittelpunkt dieser ausschneidet. Die punkt- und tangentenweise Konstruktion der Kurve wird mittels eines Verfahrens bewerkstelligt, welches in der Verwandlung einer geometrischen Aufgabe in eine phoronomische und dieser in eine kinematische besteht.

Für die Behandlung des Cardanproblems kann wesentlich auf frühere Untersuchungen hingewiesen werden, um dann dasselbe von einer bisher weniger beachteten Seite zu betrachten, welche für die Darstellung bekannter Resultate in neuer Form und die Verwerthung derselben zur Bildung von Ellipsographen von Werth ist.

---

*) Vergl. F. Reuleaux, Ueber das Verhältnifs zwischen Geometrie, Mechanik und Kinematik. Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 1890, Band XXXIV, p. 217 und 243.

Zur phoronomischen Untersuchung des Aronholdproblems wird zunächst das allgemeine Verfahren, zu einer gegebenen Punktbahn und einer geraden festen Polbahn die bewegliche zu finden, gezeigt und auf die Kegelschnitte angewendet. Der größte Raum ist dann der Ermittelung der Wendepunktseigenschaften gewidmet, welche durch ihre Anordnung auf Kurven einer allgemein sich über das ganze Bewegungsgebiet erstreckenden Behandlungsweise zugänglich werden.

Die geometrischen Eigenschaften der Ellipse lassen sich, theils einfacher theils schwieriger als mit üblichen Methoden, aus der Gestalt der Polbahnen durch Betrachtung der Bewegung ableiten.

Welche Beihülfe die Kinematik zur Verdeutlichung geometrischer Verhältnisse liefern kann, wird in dem letzten Abschnitt an einem Beispiel gezeigt. Die Kurvenschaaren, welche als Orte von Wendepunkten definirt werden, lassen sich anschaulich auch durch eine Schaar zwangläufig verbundener Mechanismen definiren, welche zur Verzeichnung der Kurven dienen können.

Die Evolute und der Ort der Krümmungsmittelpunkte im beweglichen System.

Es ist für viele Aufgaben von Interesse, ein Bild von der Veränderung der Krümmungsradien einer Kurve zu haben, so namentlich für solche Aufgaben, bei welchen ein Bogenstück durch einen Kreisbogen von mittlerem Krümmungsradius ersetzt werden soll. Die Evolute ist eine Kurve, welche in diesen Fällen gute Dienste leisten kann. Kann man die fragliche Kurve durch eine Bewegung erzeugen, so giebt es eine zweite Kurve, welche deutlicher als die Evolute die Wachsthumsverhältnisse des Krümmungsradius veranschaulicht. Verbindet man im bewegten System alle die Punkte, welche nach einander mit den Krümmungsmittelpunkten im festen System zusammenfallen, so erhält man eine Kurve, deren Fahrstrahlen von dem beschreibenden Punkte als Pol gerechnet, gleich den Krümmungsradien der Punktbahn sind. Das Verhältnifs dieser Kurve zu der Evolute kann folgendermaßen ausgedrückt werden: Wenn zwei ebene komplane Systeme in ihrer gegenseitigen Bewegung gegeben sind und eine Punktbahn im einen System betrachtet wird, so ist die Evolute der Ort der Krümmungsmittelpunkte für die direkte Bewegung, während die neu definirte Kurve derselbe Ort für die inverse Bewegung ist. Der Schnitt beider Kurven ist immer der Krümmungsmittelpunkt der Punktbahn. Diese wird bei der direkten Bewegung von einem Punkt beschrieben und hüllt bei der inversen Bewegung denselben Punkt ein. Algebraisch definirt sich die Kurve durch ihre Polargleichung. Die Fahrstrahlen sind gleich den Krümmungshalbmessern der zugehörigen Punktbahn. Die Amplituden sind gleich denen der beweglichen Polbahn, wenn man sie ebenfalls durch eine Polargleichung ausdrückt, bei welcher der die Bahnkurve beschreibende Punkt der Pol ist. Um also die Kurve der Krümmungsmittelpunkte einer Punktbahn im beweglichen System zu verzeichnen, bedarf man nur einer Gleichung zwischen ihren Fahrstrahlen und denen der beweglichen Polbahn. Die Kurve soll für die Erzeugung der Cykloide durch Rollen eines Kreises auf einem anderen bestimmt werden. Man erhält die Polargleichung des Ortes der Krümmungsmittelpunkte im beweglichen System, wenn man den Krümmungsradius der

Cykloide als Funktion des Wälzungswinkels (d. h. des abgerollten Bogens) des Rollkreises ausdrückt, weil dieser als Centriwinkel immer das Doppelte der betreffenden Amplitude des Peripheriewinkels φ ist. Man erhält

$$\varrho = 4\frac{r'\,r''}{r'+r''}\sin\varphi = \text{const. sin}\,\varphi,$$

wenn r' der Rollkreisradius, r'' die Summe von Roll- und Grundkreisradius ist. Dies ist die Polargleichung eines Kreises vom Durchmesser $4\frac{r'\,r''}{r'+r''}$ bezogen auf eine Tangente. Dieser Kreis berührt den Rollkreis einschließend im Tangenzpunkte, d. h. dem die Cykloide beschreibenden Punkte.

Im Folgenden ist eine geometrische Ableitung dieses Satzes gegeben, welche das Wesen der Kurve besser verdeutlicht.

Sind in Figur 1 C das Grundkreiscentrum, C' das Rollkreiscentrum, r und r' die zugehörigen Radien, P der die Epicykloide beschreibende Punkt und $\mathfrak{P}$ der Momentanpol, so findet man nach dem Bobillier'schen Theorem den Krümmungsmittelpunkt K' durch Ziehen der Normalen $P\mathfrak{P}$, Errichten einer Senkrechten auf derselben in $\mathfrak{P}$ und Verbinden des Schnittpunktes S' sowie des Rollkreisdurchmessers mit dem Grundkreiscentrum C. Der Schnitt der letzten Geraden $S'C$ mit der Normalen $P'\varphi$ ist der Krümmungsmittelpunkt K'. Um nun den Ort der Punkte K' im Rollkreissystem zu finden, bleibt die Konstruktion dieselbe, nur wird der Rollkreis jetzt ruhend gedacht und der frühere Grundkreis auf ihm rollend. Bei dieser Bewegung beschreibt der Punkt C einen Kreis vom Radius $C'C$ um den Punkt C'. Den Ort der Punkte K' erhält man als Schnitt zweier Strahlenbüschel P und S', deren entsprechende Strahlen durch die Schnittpunkte $\mathfrak{P}$ und C des Strahls $C'C$ mit den Kreisen um C' von den Radien r' und $r'+r=r''$ bestimmt sind.

Schlägt man einen Kreis, der zugleich zu dem Kreis vom Radius r in Bezug auf den Punkt P und zu dem Kreis vom Radius r'' in Bezug auf den Punkt S' ähnlich liegt, so theilt dieser die Strahlen $P\mathfrak{P}$ und $S'C$ in konstantem Verhältnifs. Zieht man von den beiden Theilpunkten Strahlen nach dem Kreiscentrum, so müssen diese beiden parallel $C'\mathfrak{P}C$ sein, d. h. sie müssen aufeinanderfallen, der Schnittpunkt der Strahlen $P\mathfrak{P}$ und $S'C$ liegt auf dem Kreise. Dafs ein solcher Kreis existirt, geht daraus hervor, dafs die Schaar der zu dem Kreis vom Radius r' ähnlich liegenden Kreise diesen Kreis selbst in P berührt und dafs unter der Schaar der Kreise, die ähnlich zum Kreise vom Radius r'' liegen, einer sein mufs, der gleichfalls berührt, da PS' die gemeinschaftliche Aehnlichkeitsachse ist. Den Durchmesser ϱ' des gemeinschaftlichen Aehnlichkeitskreises k (Fig. 1) erhält man dann aus der Gleichung:

$$r'' : \frac{\varrho_1}{2} = r' : 2\,r' - \frac{\varrho_1}{2}$$

$$\varrho_1 = \frac{4\,r'\,r''}{r'+r''}.$$

Für die Hypocykloide findet sich in derselben Weise:

$$\varrho_1 = \frac{4\,r'\,r''}{r''-r'}.$$

Man erhält also den Krümmungsradius der Cykloide durch Verzeichnung dieses Kreises, der den Rollkreis im beschreibenden Punkte tangirt und durch Konstruktion der Normalen. Diese Konstruktion ist in phoronomischem Sinne einfacher, als die bekannten, weil die Mitbewegung des Mittelpunktskreises ein Postulat ist. Für das Gedächtnifs dürfte sie auch die empfehlenswertheste sein.

Dieser Kreis wird sich also z. B. bei der Annäherungskonstruktion von Zahnflanken vortheilhaft benutzen lassen.

Bildung und Verwendung schematischer Mechanismen.

Wenn eine Kurve als Punktbahn definirt ist, so lassen sich die Krümmungsradien in der Regel leicht nach Savary oder Bobillier bestimmen. Damit ist die Evolute punktweise konstruirbar; die Tangente eines jeden ihrer Punkte geht durch den zugehörigen Momentanpol. Die Punkte der entsprechenden Kurve im beweglichen System können durch Umkehrung der Bewegung, d. h. durch Rücktragung der Evolutenpunkte (mit dem Dreispitzzirkel) gefunden werden. Zur Konstruktion kann das im Folgenden entwickelte Verfahren, die Bildung schematischer Mechanismen betreffend benutzt werden.

Wenn man eine Anzahl geometrischer, der Einfachheit halber geradlinig gedachter Konstruktionen zur Bestimmung von Punkten einer beliebigen Kurve durch einen phoronomischen Vorgang ersetzen will, so ist den Geraden eine solche Bewegung in der Ebene der Kurve zu geben, dafs sie sich nach einander mit den entsprechenden Geraden aller jener geometrischen Konstruktionen decken. Diese Bewegungen können z. B. durch Angabe je zweier Hüllbahnen für jede Gerade und das Entsprechen der gleichzeitig auf allen Hüllbahnen eingehüllten Punkte auf ihnen bestimmt sein. Die geometrische Konstruktion, wenn sie vom Unendlichkeitsbegriffe absieht, kann nur eine große Zahl von Kurvenpunkten bestimmen und enthält jedesmal nur bestimmte Größen: Strecken; bei dem phoronomischen Vorgang kann ein Schnittpunkt alle Kurvenpunkte durchlaufen. Die geometrische Konstruktion und der phoronomische Vorgang haben das Gesetz, welches die Lagen der Geraden gegen einander verbindet, gemein; dort aber sind nur Strecken vorhanden durch feste Punkte der Ebene gehend, hier dagegen unendliche Geraden mit gegenseitig und gegen die Ebene bestimmter Bewegung. Für die geometrischen Konstruktionen haben wir ein für unsere praktischen Zwecke brauchbares Bild in den Kreide- und Bleistiftstrichen, welche zu dem abgebildeten Objekt zweite und dritte Dimension und Körperlichkeit in leicht vernachlässigbar kleinem Maße zufügen. Um den phoronomischen Vorgang entsprechend abzubilden, sind die Geraden zunächst wieder zu Strecken zu machen und ist diesen Körperlichkeit zu verleihen; da die Starrheit nicht mehr durch das Anhaften von Kreide oder Graphithügeln auf einer starren Oberfläche zu erreichen ist, mufs Stoff und Form der die Geraden in sich tragenden, sie abbildenden Stäbe entsprechend gewählt werden. Endlich mufs die vorgeschriebene Bewegung dieser körperlichen Gebilde durch die Berührung starrer und undurchdringlicher Oberflächenpaare, Elementenpaare gesichert werden. Die letzte, von Reuleaux aufgefundene, Bedingung bildet das wesentliche unterscheidende Merkmal des so entstehenden, „Mechanismus“

genannten, Gebildes. Die Undurchdringlichkeit wäre hiernach nur relativ je zwischen den zwei Oberflächen eines Paares nothwendig, für den die Oberflächen verbindenden und tragenden Körper aber ganz entbehrlich. Die Erfahrung lehrt uns, dafs die Undurchdringlichkeit absolut, auch bei dem verbindenden Körper eines Gliedes des Mechanismus nicht zu vermeiden ist, und dafs bei Konstruktion des Mechanismus deshalb auf beides Rücksicht genommen werden mufs. Schematisch soll nun der Mechanismus heißen, wenn diese Rücksicht nicht genommen wird. Man nimmt sie z. B. nie bei der Untersuchung der Bewegung vorhandener Mechanismen auf dem Papier. Bei ebenen Mechanismen können wir dann sogar von der dritten Dimension absehen und einen ebenen schematischen Mechanismus definiren als ein Gebilde, bei welchem die Zwangläufigkeit der Glieder durch die Berührung starrer, relativ undurchdringlicher mit den Gliedern starr verbundener Kurven (Linien) in einer Ebene gesichert ist. Der Zweck, dessenthalben dieser scheinbar nur durch logische Spielerei gefundene Begriff aufgestellt wurde, besteht in einer Zwangläufigkeit, welche es ermöglicht, nachdem ein Glied festgestellt ist, für jeden Punkt jedes beweglichen Gliedes seine Punktbahn nicht nur punkt-, sondern auch tangentenweise zu konstruiren. Der Uebergang von dem gesetzmäßig bewegten Liniensystem zum schematischen Mechanismus wird immer dann zu machen sein, wenn diese Gesetzmäßigkeit sich nicht so einfach ausdrückt, dafs sie zur Bestimmung der Tangenten der Punktbahnen verwandt werden kann. Zuerst werden die geometrischen Begriffe, welche die gegenseitige Lage der Geraden bestimmen, durch kinematische zu ersetzen sein, welche Stäbe denselben Gesetzen gehorchen lassen. So wird z. B. der Begriff „Schnittpunkt zweier Geraden“ durch den Begriff „zwei durch ein Cylinderpaar verbundene Prismenpaare“ ersetzt werden können. Die Parallelität und jedes andere konstante Winkelverhältnifs zweier zu Stäben gewordener Geraden wird durch zwei sie führende starr verbundene Prismen gesichert. Um einen Stab senkrecht auf einen bestimmten Punkt eines anderen stehen zu lassen, wird ein zu dessen Längsachse senkrechtes Prisma genügen etc. Nachdem diese Bestimmungen getroffen sind, wird in der Regel noch eine größere Anzahl von Stäben in sich verschiebbar sein, d. h. die feste Verbindung eines Stabes mit einem der ihn führenden Prismen, die Unterdrückung desselben ist noch möglich. Hier handelt es sich jetzt darum, eine solche Wahl mit Rücksicht auf das festzustellende Glied zu treffen, dafs die Bestimmung der Momentanpole von einem Glied ausgehend und immer die neu gefundenen Pole benutzend, erfolgen kann. Es ist leicht, auf solche Weise z. B. einen schematischen Ellipsographen herzustellen und den zugehörigen Evolutographen anzuschließen. Stellt man diesen Mechanismus nun aber statt auf das Glied, in dessen Ebene sich die Ellipse befindet, auf das Glied, dem der die Ellipse beschreibende Punkt angehört, so wird der Punkt, der vorher die Evolute beschrieb, nun die Kurve der Krümmungsmittelpunkte der Ellipse im (vorher) beweglichen System beschreiben. Die Ellipse selbst wird den Punkt einhüllen und die Tangentenrichtungen dieser Kurve werden vermöge der Momentanpole bestimmbar sein. Durch Anwendung geometrischer Sätze, die aus der Konstruktionsfigur entspringen, wird man mehrfach geschlossene Mechanismen erhalten und die Aufgabe der Momentanpolbestimmung erleichtern können.

Das Cardan-Problem.

Die einfachste Form der elliptischen Bewegung und die bestuntersuchte ist die nach Reuleaux unter dem Namen des Cardan-Problems bekannte*). Die Bewegung ist durch das Rollen eines Kreises in einem festen Kreis von doppeltem Durchmesser bestimmt und zeigt folgende für die kinematische Verwerthung wichtige phoronomische Eigenthümlichkeiten. Alle Punkte des beweglichen Systems beschreiben Ellipsen mit dem Grundkreiscentrum als Mittelpunkt; die Peripherieabstände des beschreibenden Punktes sind gleich den Halbachsen der Ellipse. Die Hauptachsen der Ellipse erhält man durch Verbinden des Kreiscentrums mit den Schnittpunkten des durch den beschreibenden Punkt gehenden Rollkreisdurchmessers und der Rollkreisperipherie. Der Momentanpol liegt auf der Centrale der beiden Kreise, das Rollkreiscentrum beschreibt die konzentrirte Punktbahn, nämlich einen dem Rollkreis gleichen dem Grundkreis konzentrischen Kreis, während die Peripheriepunkte auf Geraden durch das Grundkreiscentrum gleiten. Obgleich bekannt war, dafs dieselbe Ellipse sich durch zwei verschiedene Kreispaare erzeugen läfst, scheint die gleichzeitige Betrachtung dieser beiden Bewegungen noch nicht allgemein durchgeführt worden zu sein.

Fig. 2 zeigt zwei Rollkreise von den Radien r' und r'' mit den zugehörigen Grundkreisen, in welchen rollend sie mit ihrem gemeinschaftlichen Punkt P die Ellipse beschreiben, die Rollkreiscentren C' und C'' beschreiben dabei die punktirten Kreise. Von den Punkten, welche Gerade beschreiben, sind diejenigen herausgegriffen, welche auf den Hauptachsen bleiben: $G_a' G_b'$; $G_a'' G_b''$. Da $\mathfrak{P}' P$ eine Normale und $\mathfrak{P}'' P$ auch eine Normale der Ellipse ist, mufs $\mathfrak{P}' P \mathfrak{P}''$ eine Gerade sein; aus der Kongruenz der Dreiecke $\mathfrak{P}' P C'$ und $P \mathfrak{P}' C''$ folgt, dafs Punkt P die Verbindungslinie der Pole $\mathfrak{P}' \mathfrak{P}''$ halbirt. Der Schnittpunkt W der beiden Rollkreise liegt gleichfalls auf der Normalen, weil der Fußpunkt des Lotes aus Punkt C auf $\mathfrak{P}' \mathfrak{P}''$ auf beiden Kreisperipherien liegen mufs. Da die Rollkreise zugleich Wendekreise sind und $P \mathfrak{P}' = P \mathfrak{P}''$ ist, ergiebt sich nach einer Folgerung aus dem Savary'schen Satze**), dafs der Krümmungsmittelpunkt der Ellipse jedesmal der 4. harmonische Punkt zu den 3 Schnitten der Normalen mit den beiden Rollkreisen ist.

Zieht man die Verbindungsdurchmesser der Punkte $G_a' G_b'$ und $G_a'' G_b''$, so geht aus der Kongruenz der Dreiecke $P C' \mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{P}'' P C''$ hervor, dafs diese Durchmesser parallel den Centralen CC'' und CC' sind, mithin $CC' PC''$ ein winkelveränderliches Parallelogramm mit den Rollkreisradien als Seiten ist. $G_a' P G_a''$ und $G_b' P G_b''$ sind gleichschenklige Dreiecke, welche die Differenz und die Summe dieser Radien als Schenkellängen haben.

Wenn man die Strecken $P \mathfrak{P}'$ und $P \mathfrak{P}''$ als die lothrechten Geschwindigkeiten***) des Punktes P ansieht, so folgt, dafs die Rollkreise C' und C'' entgegengesetzt gleiche Winkelgeschwindigkeiten haben. Diese lothrechte Geschwindigkeit ist gleich der

---

*) Siehe Reuleaux, Theoretische Kinematik, Seite 123, auch Rittershaus, Verhandlungen des Vereins für Gewerbfleiß 1874.

**) Vergl. Rittershaus a. a. O.

***) Siehe Schadwill, Verhandlungen des Vereins f. Gewerbfleiß 1876, Seite 378.

Diagonale $C'C''$ des beweglichen Parallelogramms, diese selbst ist gleich dem der zweiten, als Ellipsenhalbmesser betrachteten, Diagonale CP konjugirten Halbmesser. Als ein polares Geschwindigkeitsdiagramm des Punktes P bei gleichförmiger Bewegung der Rollkreise, bei welchem die Endpunkte konjugirter Durchmesser als bewegte Punkte und Endpunkte der vom Centrum abgetragenen Geschwindigkeiten entsprechen, erhält man also die Ellipse selbst wieder.

Fig. 9 zeigt die eiförmige Kurve der Ellipsenkrümmungsmittelpunkte im Rollkreissystem und den schematischen Mechanismus zur Verzeichnung derselben, welcher folgendermaßen hergeleitet ist. Von dem Savary'schen Satze ausgehend findet man für den Krümmungsradius $PKe = P\mathfrak{P}^2 : PW$

$$P\mathfrak{P} \cdot PW = p^2$$

$$PKe = P\mathfrak{P} \cdot \frac{P\mathfrak{P}^2}{p^2}$$

Die Symbole 12, 13 u. s. w. bezeichnen in üblicher Weise die Pole und lassen nach bekanntem Verfahren*) die Tangente der Punktbahn von Ke finden.

Die Verwerthung des Parallelogramms aus den Rollkreisradien zu einem Ellipsographen scheint bisher noch nicht versucht worden zu sein, bietet aber keine Schwierigkeit, da einfache Mittel zur Erzeugung gleich schneller entgegengesetzter Drehungen bekannt sind. Die Verwendung des Punktes W zur Tangentialführung des Schreibstifts scheint keinen Vortheil zu bieten. Er wird kinematisch durch ein an das Gelenkparallelogramm $CC'PC''$ angeschlossenes Gelenkdeltoid $CC'WC''$ erhalten.

Aronhold's Problem.

Wenn eine ebene Bewegung durch Angabe der festen Polbahn als einer Geraden und durch die Bahn eines Punktes gegeben ist, und wenn die Gerade eine Achse des Koordinatensystems ist, auf welches sich die Gleichung der Punktbahn bezieht, so läfst sich aus der Gleichung der Punktbahn leicht die der zweiten Polbahn herleiten, wenn man zur Bestimmung der letzteren die von Aronhold angegebenen Tangentenpolarkoordinaten verwendet. Durch diese wird der Radiusvektor einer Kurve als Funktion des von ihm und der Tangente eingeschlossenen Winkels gegeben.

$$R = f(u).$$

Bezeichnet ψ den Winkel des Radiusvektors mit einer festen Achse, so hat man:

$$\cos u = \frac{dR}{\sqrt{dR^2 + R^2 \cos^2 d\psi}} = \frac{dR}{ds}$$

$$ds = \frac{dR}{\cos u}$$

$$\sin u = \frac{R d\psi}{\sqrt{dR^2 + R^2 \cos^2 d\psi}} = \frac{R\, d\psi}{ds}$$

$$\operatorname{tg} u = R \frac{d\psi}{dR}.$$

---

*) Siehe z. B. Lehrbuch der Kinematik von Burmester §§ 28, 30, 32.

Sehr einfach gestaltet sich der Ausdruck für den Krümmungsradius. Nennt man τ den Winkel des Krümmungsradius mit einer festen Achse, so ist

$$\varrho d\tau = ds$$

und ferner $$d\tau = du + d\psi$$

$$\varrho = \frac{ds}{du + d\psi} = \frac{dR}{\cos u\,(du + d\psi)}$$

$$= \frac{dR}{\cos u\left(du + \frac{dR}{R}\operatorname{tg} u\right)}$$

$$= \frac{R\,dR}{R\cos u\,du + dR\sin u}$$

$$= R\,\frac{dR}{d(R\sin u)}.$$ *)

Wenn eine in Tangentenpolarkoordinaten gegebene Kurve auf einer Geraden rollt, und man betrachtet die Bahn, die vom Koordinatenanfangspunkt beschrieben wird, so sind die Normalen dieser Bahn immer die Verbindungslinien des beschreibenden Punktes mit dem Momentanpol der Bewegung, d. h. dem augenblicklichen Berührungspunkt der rollenden Kurve und der Geraden; zugleich aber sind sie die Radienvektoren der rollenden Kurve. Die gerade feste Polbahn ist immer Tangente an die rollende, folglich ist der Winkel, den die Normale der Bahn des Koordinatenanfangspunktes mit der festen Polbahn bildet, identisch mit dem Winkel, den der Radiusvektor mit der Tangente bildet.

Wenn nun eine Punktbahn gegeben ist und die Beziehung der Länge der Normalen derselben bis zu einer Geraden zu dem Winkel, den die Normale mit dieser Geraden bildet, gefunden ist, so stellt die Gleichung, welche diese Beziehung ausdrückt, zugleich die Gleichung einer Kurve in Tangentenpolarkoordinaten dar, welche auf der Geraden abrollend mit dem Koordinatenanfang die gegebene Kurve beschreibt.

Bei Anwendung dieses Satzes auf die Kegelschnitte wird als feste Gerade die Hauptachse angenommen.

Es ist für die Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\cot u = y^1 = \frac{b}{ay}\sqrt{b^2 - y^2} \qquad y^2 = \frac{b^4}{a^2\cot^2 u + b^2}$$

die Normale $$N^2 = \frac{y^2}{\sin^2 u}$$

$$R^2 = N^2 = \frac{b^4}{a^2\cos^2 u + b^2\sin^2 u}.$$

Dies ist die Gleichung einer Epicykloide, wie folgende geometrische Betrachtung ergiebt.

*) Siehe z. B. Hartmann, Theorie der Lokomotiv-Tender-Kupplungen. 1884. p. 51.

Rollt in Fig. 1 der Kreis mit dem Centrum C' und dem Radius r' auf dem Kreis mit dem Centrum C und Radius r und ist $\mathfrak{P}$ der Momentanpol, P' der die Epicykloide beschreibende Punkt, u der Winkel zwischen dem Radiusvektor R und der Tangente t und φ der Winkel zwischen der Tangente t und der Centralen CC', so hat man, nachdem noch das Loth CL auf die Tangente gefällt worden ist:

$$PL = R\cos u = r\cos\varphi$$
$$CL = R\sin u = (r+2r')\sin\varphi$$
$$\frac{R^2\cos^2 u}{r^2} = \cos^2\varphi$$
$$\frac{R^2\sin^2 u}{(r+2r')^2} = \sin^2\varphi$$
$$R^2 = \frac{r^2(r+2r')^2}{(r+2r')^2\cos^2 u + r^2\sin^2 u}.$$

Die letzte Gleichung hat dieselbe Form wie die oben gefundene der beweglichen Polbahn.

Bei Erzeugung der Hypocykloide erhält man dieselbe Gleichung, es ist aber dann

$$0 > -2r' < r$$
oder $-2r' > r$ und zugleich $\cos u < 0$.

Für die Erzeugung der Hyperbel mit Benutzung der großen Achse als feste Polbahn ergiebt sich in derselben Weise als Gleichung der beweglichen Polbahn:

$$R^2 = \frac{b^4}{a^2\cos^2 u - b^2\sin^2 u}.$$

Die Gleichung stellt eine Spirale dar, die viel Aehnlichkeit mit der logarithmischen hat.

Für die Parabel ist die Gleichung der beweglichen Polbahn:

$$R = \frac{p}{\cos u}.$$

Diese ist eine Kreisevolvente*).

Erzeugung der Ellipse.

Es sei eine feste Gerade gegeben und eine auf ihr rollende Epi- oder Hypocykloide, es soll die Ellipse mit ihren wichtigsten Eigenschaften aus der Gestalt dieser Polbahnen und der Betrachtung ihrer Bewegung abgeleitet werden.

Wenn man die Epicykloide durch ihren Grundkreis und den auf diesem rollenden Rollkreis gegeben denkt, und man läfst den Grundkreismittelpunkt seine elliptische Bahn von der festen Geraden aus beginnen, so liegt der erste Momentanpol von dem Anfang der Punktbahn, dem Ellipsenscheitel, um den Grundkreisradius entfernt, dasselbe

*) Diese drei Kurven wurden von O. Kessler in seiner Dissertation (Jena 1864) in anderer Weise bestimmt. Die Cykloidenrollung wurde schon von Prof. Aronhold in seinen Vorlesungen behandelt. (Nach mündlicher Mittheilung.)

findet beim Ende der Bewegung statt, d. h. nachdem eine halbe Ellipse beschrieben worden ist. Die große Ellipsenachse ist hiernach gleich dem Epicykloidenumfang vermehrt um den Grundkreisdurchmesser

$$2a = 8\frac{r'}{r}(r' - r) + 2r = 2\frac{(r + 2r')^2}{r}.$$

Die halbe kleine Achse der Ellipse fällt mit dem größten Radiusvektor der Epicykloide zusammen, also

$$b = r + 2r'.$$

Diese beiden Bestimmungen lassen sich auch durch Gleichsetzung der Koeffizienten der zwei oben gefundenen Gleichungen der Epicykloide in Tangentenpolarkoordinaten herleiten. Man hat dann zugleich damit die Rektifikation der Epicykloide geleistet.

Bezeichnet man die bestimmenden Größen, d. h. die beiden Kreisradien einer Hypocykloide, die durch Rollen auf der Nebenachse dieselbe Ellipse erzeugt, mit r_1 und r_1' und nimmt diese Größen positiv an, so ergiebt sich in derselben Weise

$$a = r_1 - 2r_1'$$
$$b = \frac{(r_1 - 2r_1')^2}{r_1}.$$

Eine Epicykloide oder Hypocykloide kann in zweierlei Weise als Rollkurve erzeugt werden. Wenn auf einem Kreis zwei Kreise rollen, deren Durchmesserdifferenz gleich dem Grundkreisdurchmesser ist, so erzeugen die Peripheriepunkte beider kongruente gemeine Epicykloiden, sobald der große Kreis umschließend (pericykloidisch) auf dem Grundkreis rollt. Rollen zwei Kreise, deren Durchmessersumme gleich dem Grundkreisdurchmesser ist, in diesem, so erzeugen sie gleichfalls kongruente Hypocykloiden*). Benutzt man die Radien $(r'\ r'')$ eines solchen Rollkreispaares als Bestimmungsstücke, so erhalten alle Gleichungen symmetrischere Gestalt.

$$a = \frac{(r' + r'')^2}{r'' - r'} = r_1'' - r_1'$$
$$b = r'' + r' \qquad = \frac{(r_1'' - r_1')^2}{r_1'' + r_1'}$$
$$r' = \frac{b}{a} \cdot \frac{a - b}{2}$$
$$r'' = \frac{b}{a} \cdot \frac{a + b}{2}$$
$$r_1' = \frac{a}{b} \cdot \frac{a - b}{2}$$
$$r_1'' = \frac{a}{b} \cdot \frac{a + b}{2}.$$

Diese Strecken $r'\ r''$, $r_1'\ r_1''$ sind gleich den Seiten eines Parallelogramms, dessen freier Eckpunkt dann die Epicykloide erzeugt, wenn man zwei Parallelogrammseiten

*) E. Bellermann, Epicykloiden und Hypocykloiden 1867.

mit Geschwindigkeiten um einen Punkt dreht, die umgekehrt proportional den Seitenlängen sind.

Wenn man hiernach eine Ellipse, die ja nach dem Cardanproblem eine spezielle Hypocykloide ist, erzeugt, so haben die Parallelogrammseiten die Längen $\frac{a+b}{2}$ und $\frac{a-b}{2}$; sie stehen also in demselben Verhältnifs, wie die Seiten der Parallelogramme, welche die erwähnten Epi- und Hypocykloiden beschreiben.

Als Verhältnifs zwischen den Bestimmungsstücken einer Epicykloide und einer Hypocykloide, welche dieselbe Ellipse beschreiben, ergiebt sich aus den obigen Gleichungen

$$r' = r_1' \left(\frac{r_1'' - r_1'}{r_1'' + r_1'}\right)^2$$
$$r'' = r_1'' \left(\frac{r_1'' - r_1'}{r_1'' + r_1'}\right)^2$$
$$r_1' = r' \left(\frac{r' + r''}{r'' - r'}\right)^2$$
$$r_1'' = r'' \left(\frac{r' + r''}{r'' - r'}\right)^2.$$

Abrollung der beweglichen Polbahn.

Das wesentlichste Hülfsmittel, um eine augenblickliche Bewegung zu untersuchen, ist der Wendekreis, d. h. der Kreis in dem festen System, auf welchem alle Wendepunkte liegen, die in dem betrachteten Augenblick von Punkten des beweglichen Systems aus auf ihren Punktbahnen durchlaufen werden.

Nach einer Umformung des Satzes von Savary ist der Krümmungsradius des von einem Punkte des beweglichen Systems in einem Augenblick beschriebenen Bahnelementes gleich dem Quadrate des Abstands dieses Punktes vom augenblicklichen Drehpunkt, getheilt durch die zwischen Wendekreis und Punkt liegende Strecke dieses Abstands. Wendet man diesen Satz im vorliegenden Falle auf die Krümmungsmittelpunkte der Polbahnen und ihre augenblicklichen Bahnelemente an und berücksichtigt man, dafs bei Umkehrung der Bewegung der Bahnpunkt und sein Krümmungsmittelpunkt ihre Rollen vertauschen und dafs die Krümmungsmittelpunkte der Polbahnen ein Paar solcher zugeordneter Punkte sind, so folgt aus der unendlichen Größe des Krümmungsradius der festen Polbahn, dafs der Krümmungsmittelpunkt der beweglichen Polbahn einen Wendepunkt der von ihm erzeugten Punktbahn beschreiben, d. h. auf dem Wendekreise liegen mufs. Da aber dieser Punkt zugleich auf der Normalen zur Tangente der Polbahnen im Momentanpol liegt und der Wendekreis letztere auch berührt, so ist der Krümmungsradius der beweglichen Polbahn, der Cykloide, immer Durchmesser des Wendekreises.

Dafs übrigens der Krümmungsmittelpunkt einer auf einer Geraden rollenden Kurve in drei auf einander folgenden Lagen denselben Abstand von der Geraden hat, ergiebt sich aus der unmittelbaren Anschauung und der Definition des Krümmungskreises.

Wenn wir nun das oben gefundene Ergebnifs, dafs die Krümmungscentren der Cykloiden im Rollkreissystem auf einem Kreis liegen, benutzen, so finden wir hier die Wendekreisdurchmesser durch die Konstruktion dieses Kreises k' (Fig. 3). Der Winkel, den die Gerade CG_a' mit der festen Geraden MO bildet, ist als Peripheriewinkel im Rollkreis gleich dem halben Wälzungswinkel. Da die Cykloide auch durch Rollung des Kreises mit dem Radius r'' beschrieben wird, so ergiebt sich eine zweite parallele Konstruktion des Wendekreises. Das Durchmesserende G_a'' des zweiten Rollkreises gleitet ebenfalls auf der Geraden MO.

Denkt man sich zu gleicher Zeit mit der Epicykloide auch die Hypocykloide abrollend und dieselbe Ellipse erzeugend, so findet man die Wendekreise dieser Bewegung auf dieselbe Weise. Es ergeben sich gleichfalls zwei Punkte G_b' und G_b'', welche konstanten Abstand vom Grundkreiscentrum C haben, nämlich die Strecke $r_1'' - r_1'$, und welche auf der festen Geraden NO bleiben. Der Winkel, den diese Geraden mit der Geraden NO bilden, ist gleich dem Komplement des Winkels φ'.

Da diese Winkel dieselben sind, welche auch das vorhin gefundene Geradenpaar mit dieser Ellipsenachse bildet, so fallen die beiden Paare zu einem zusammen, weil ja der Punkt C allen Geraden gemeinsam ist.

Die beiden so gefundenen Geraden gleiten mit ihren Punkten $G_a'\ G_b''$ und $G_a''\ G_b''$ auf den beiden Hauptachsen der Ellipse, während ihr gemeinschaftlicher Punkt C die Ellipse beschreibt.

Hiermit ist der Zusammenhang der vorliegenden elliptischen Bewegung mit der des Cardanproblems dargethan.

Es ist soeben gefunden worden, dafs die Geraden, welche in jedem Augenblick die Centralen zwischen dem Grundkreis und Rollkreis der sich bewegenden Cykloide darstellen, bei dieser Bewegung identisch mit den zwei Gleitgeraden des Cardanproblems sind, welche durch ihre Bewegung dieselbe Ellipse erzeugen. Jeder mit einer dieser Geraden verbundene Punkt beschreibt gleichfalls eine Ellipse, folglich auch jeder der Punkte $P'\ P''$ und $P_1'\ P_1''$. Die Halbachsenlängen dieser Ellipsen, auf welchen die Pole der beiden cykloidischen, d. h. zur Erzeugung der Cykloiden dienenden Bewegungen liegen, sind:

$$\text{(Hauptachsen)} \quad \frac{4\,r'\,r''}{r''-r'},\ \frac{4\,r'\,r''}{r''-r'},\quad 2\,r_1',\quad 2\,r_1''$$

$$\text{(Nebenachsen)} \quad 2\,r',\quad 2\,r'',\quad \frac{4\,r_1'\,r_1''}{r_1'+r_1''},\ \frac{4\,r_1'\,r_1''}{r_1'+r_1''}.$$

Der dem Momentanpol gegenüberliegende Punkt des Wendekreises, der Wendekreis-Hauptpunkt heißen mag, theilt die Ordinaten dieser Ellipsen in den konstanten Verhältnissen

$$r' : \frac{4\,r'\,r''}{r'+r''} = \frac{r'+r''}{4\,r''} \quad \text{und} \quad r'' : \frac{4\,r'\,r''}{r'+r''} = \frac{r'+r''}{4\,r'} \quad \text{(Epicykloide)}$$

$$\text{und } r_1' : \frac{4\,r_1'\,r_1''}{r_1''-r_1'} = \frac{r_1''-r_1'}{4\,r_1''} \quad \text{und } r_1'' : \frac{4\,r_1'\,r_1''}{r_1''-r_1'} = \frac{r_1''-r_1'}{4\,r_1'} \quad \text{(Hypocykloide).}$$

Die Wendekreis-Hauptpunkte liegen deshalb auch auf einer Ellipse, deren Achsen sich ergeben:

$$a^* = \frac{8\,r'\,r''}{r'' - r'} = -\frac{a^2 - b^2}{a}$$

$$b^* = \frac{8\,r'\,r''}{r' + r''} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a}$$

$$a^* : b^* = a : b$$

$$a_1^* = \frac{8\,r_1'\,r_1''}{r_1'' - r_1'} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a^2 - b^2}{b}$$

$$b_1^* = \frac{8\,r_1'\,r_1''}{r_1'' + r_1'} = \frac{a^2 - b^2}{b}$$

$$a_1^* : b_1^* = a : b.$$

Die Ellipse der Wendekreis-Hauptpunkte ist mithin ähnlich und ähnlich liegend zu der Bahnellipse (Fig. 3).

Aus dieser Eigenschaft ergiebt sich die einfachste Konstruktion des Wendekreises. Wenn man den die Bahnellipse beschreibenden Punkt C (Fig. 3) mit dem Ellipsencentrum verbindet, so ist der Schnitt der Verbindungsgeraden und der Normalen im Momentanpol der Wendekreis-Hauptpunkt.

Die Rollung einer Cykloide auf einer Geraden ist bisher bloß in Bezug auf die Bahn des Grundkreismittelpunkts, die Ellipse und deren Eigenschaften betrachtet worden, auf die Bahnen der übrigen Punkte des beweglichen Systems wurde keine Rücksicht genommen. Im Folgenden sollen nun einige Sätze über die Wendepunkte der allgemeinen Punktbahnen bei der betrachteten Bewegung abgeleitet werden. Es wird sich ergeben, dafs die Wendepunkte sich auf einer sehr anschaulich definirten Kurvenschaar anordnen lassen, deren Umhüllende sich leicht zeichnen läfst.

Alle Wendepunkte, welche in demselben Augenblicke beschrieben werden, liegen auf dem Wendekreis. Oben ist bewiesen worden, dafs die Wendekreishauptpunkte und mithin auch die Centren dieser Kreise auf einer Ellipse liegen. Da die Kreise außerdem die gerade feste Polbahn tangieren, ist die Schaar derselben genügend definirt. Zugleich ergiebt sich, dafs in einem Punkt der Ebene höchstens zwei Wendepunkte zusammenfallen können, und dafs dies in allen Punkten, welche von der Kreisschaar bedeckt werden, der Fall ist. Diese Anordnung der Wendepunkte ist weniger übersichtlich, als die im Folgenden gegebene Gruppirung der Wendepunkte nach der Richtung ihrer Wendetangenten.

Die Wendetangenten der mit den Wendekreishauptpunkten zusammenfallenden Bahnpunkte sind alle parallel der festen Polbahn; diese Wendepunkte liegen auf einer Ellipse, welche die Achsenrichtungen mit der Bahnellipse gemeinsam hat und im Verhältnifs $a^2 - b^2 : a^2$ bezw. $a^2 - b^2 : b^2$ zu ihr steht. Auf alle Wendepunkte mit Wendetangenten gleicher Richtung ausgedehnt lautet der Satz:

Alle gleichgerichteten Wendepunkte liegen auf einer Ellipse, welche eine Achse (Hauptachse bei Epi-, Nebenachse bei Hypocykloidenrollung) mit der Ellipse der Wendekreishauptpunkte gemein haben und bei welcher

die dieser konjugirte Halbachse diejenige Sehne des größten (centralen) Wendekreises ist, welche durch das Centrum der Bahnellipse geht und senkrecht zur Richtung der Wendetangenten steht.

Der Beweis ist einfach: Alle Wendepunkte mit gleichgerichteten Tangenten liegen in den Wendekreisen ähnlich. Der Winkel, welchen ihre Normalen mit der Achse bilden, heiße α. Denkt man sich nun die Kurve aller für ein bestimmtes α gefundenen Punkte auf ein Koordinatensystem bezogen, dessen eine Achse die gemeinschaftliche Ellipsenachse ist und dessen andere Achse durch das Ellipsencentrum geht und gleichfalls den Winkel α mit der ersten Achse bildet, so hat die Kurve in diesem Koordinatensystem dieselben Abscissen, wie die Ellipse der Wendekreishauptpunkte; ihre Ordinaten sind gleich den Ordinaten dieser Ellipse multiplizirt mit sin α. Drückt man also die Ellipsenkoordinaten durch die der gesuchten Kurve aus und führt die Ausdrücke in die Ellipsengleichung ein, so erhält man

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2 \sin^2 \alpha} = 1.$$

Die Kurve ist also auch eine Ellipse, welche durch diese Gleichung auf konjugirte Durchmesser bezogen wird.

Macht man nun α zu einem variablen Parameter, der von 0^0 bis 180^0 ansteigt, so erhält man eine Ellipsenschaar über einer gemeinschaftlichen Achse. Jede Ellipse ist der Ort der Wendepunkte, deren Normalen parallel derjenigen Achse sind, welche der gemeinschaftlichen Achse konjugirt ist. Fig. 5 zeigt einige dieser Ellipsen punktirt und ihre Einhüllende ausgezogen.

Diese Einhüllende wird durch die Schnittpunkte je zweier benachbarter Ellipsen gebildet; es fallen also in jedem ihrer Punkte zwei Wendepunkte zusammen, deren Richtungen unendlich wenig verschieden sind. Die Punkte, welche in einem Punkt dieser Einhüllenden einen Wendepunkt ihrer Punktbahn beschreiben, beschreiben im nächsten Augenblick einen gleichgerichteten Wendepunkt, d. h. das betreffende Bogendifferential hat mehr wie drei Punkte mit seiner Tangente gemein; es ist ein Undulationspunkt vorhanden.

Die Ellipsen der Wendetangenten gleicher Richtung schneiden sich einander außer in den zwei allen gemeinsamen je in 2 Punkten, die auch an den Enden eines gemeinsamen Durchmessers liegen müssen. Diese Punkte bezeichnen die Fläche der Ellipsenschaar; es werden also in jedem Punkt derselben zwei Wendepunkte beschrieben, deren Richtungen durch die zwei zugehörigen Ellipsen bestimmt sind. Hat man die zwei Ellipsen konstruirt, welche durch den gegebenen Punkt gehen und die gemeinschaftliche Achse zum Durchmesser haben, so bestimmt man die zu diesem Durchmesser konjugirten Durchmesser in beiden Ellipsen; diese sind parallel den Normalen der zwei in den gegebenen Punkt fallenden Wendepunkte.

Es ist von Interesse, nun auch im beweglichen System die zwei Punkte aufzufinden, welche an dem gegebenen Punkt des festen Systems Wendepunkte ihrer Punktbahnen beschreiben. Die zwei Normalen in dem Doppelwendepunkt schneiden die Ellipsenhauptachse an zwei Punkten, welche die Momentanpole bei der Beschreibung der zwei Wendepunkte darstellen. Hierdurch sind zwei Punkte auf dem Umfang der Cykloide

bestimmt. Die Tangenten derselben fallen in den zwei betreffenden Lagen mit der festen Polbahn, der Ellipsenachse, zusammen. Die beiden Punkte auf der Cykloidenfläche sind also gerade so in Bezug auf die beiden so gefundenen Tangenten und Tangenzpunkte gelegen, wie der Doppelwendepunkt gegen die Ellipsenachse und die beiden Pole gelegen ist, folglich durch Rücktragung zu bestimmen. Dazu ist eine Rektifikation der Cykloide erforderlich. Diese kann auf eine Kreisrektifikation zurückgeführt werden. Es ist nämlich durch den Durchmesser eines Wendekreises ein Krümmungshalbmesser der Cykloide gegeben; die zwei Wendekreise zu jedem Doppelwendepunkt ergeben sich aber ohne Weiteres, wenn seine Normalen gefunden sind. Es sind also auf der Cykloide die 2 Punkte zu suchen, zu welchen Krümmungshalbmesser von den Längen der 2 Wendekreisdurchmesser gehören. Die zugehörigen Stellungen der die Cykloide erzeugenden Kreise findet man mit Hülfe des Kreises der Krümmungsmittelpunkte der Cykloide, welcher mit dem Rollkreis fest verbunden gedacht wird. In diesem Kreis wird jedesmal eine Sehne von der Länge des Wendekreisdurchmessers eingetragen. Diese Sehne geht von demjenigen Punkt des Rollkreises aus, welcher die Cykloide beschreibt, und schneidet den Rollkreis an einem zweiten Punkt, welcher derjenige Momentanpol bei der Beschreibung der Cykloide ist, welcher zu dem gekennzeichneten Krümmungsradius gehört. Durch diese beiden Punkte auf dem Rollkreis ist das abgerollte Stück desselben gegeben, der Anfang der Cykloide also durch Rücktragung desselben auf der Grundkreisperipherie zu ermitteln. Der gesuchte Punkt auf ihrer Fläche hat dieselbe Lage relativ dem gekennzeichneten Krümmungsradius, wie der Wendepunkt relativ der Senkrechten auf der Ellipsenachse in dem zu ihm gehörigen Momentanpol.

Es sollen nun die Punkte des beweglichen Systems nach demselben Eintheilungsgrund, wie die des festen Systems, d. h. nach der Richtung der Wendetangenten der von ihnen beschriebenen Punktbahnen auf einer Kurvenschaar angeordnet werden. Es sollen im beweglichen System Punkte auf einer Kurve liegen, welche nach einander Wendepunkte beschreiben, deren Tangenten gleichgerichtet sind. Es wird also jeder der Ellipsen des festen Systems eine solche Kurve zugeordnet sein; bei der Bewegung werden sich die beiden Kurven immer auf dem Wendekreis schneiden. Die Kurven sind Cykloiden und es gilt der Satz:

Alle Punkte, deren Bahnen gleichgerichtete Wendetangenten besitzen, liegen im beweglichen System auf Cykloiden, welche mit der abrollenden Cykloide gleiche Phase haben und durch die Spitzen derselben gehen. Außer an diesen beiden Punkten schneiden zwei dieser Cykloiden sich in jeder Phase noch einmal. Diese Schnittpunkte bedecken die Fläche der Cykloidenschaar; jeder Punkt derselben besitzt also zwei Wendepunkte auf seiner Bahn.

Der Beweis des angegebenen Satzes kann mit Hülfe phoronomischer Betrachtungen folgendermaßen geführt werden:

Die Wendepunkte, deren Tangenten gleichgerichtet waren, lagen an ähnlichen Stellen der Wendekreise. Im beweglichen System sind aber die Krümmungsradien der Cykloide die Durchmesser der Wendekreise, folglich liegen die Punkte, welche gleichgerichtete Wendepunkte beschreiben, ähnlich zu den Krümmungsradien der Cykloide. Betrachtet man die Cykloide in ihrer Entstehung, so steht die Sehne des Wälzungs-

winkels im Rollkreis in konstantem Verhältnifs zum Krümmungsradius, folglich liegen jene Punkte auch ähnlich zu diesen Sehnen.

Zwei ähnlich bleibende Systeme kann man durch die gleichzeitige Erzeugung zweier gleichphasischen Cykloiden über konzentrischen Grundkreisen herstellen. In Fig. 7 rolle der Kreis vom Radius $C'P$ auf dem Kreis vom Radius CP, desgleichen der Kreis vom Radius C^*P^* auf dem Kreis vom Radius CP^*. Der Abstand PP^* (od. $C'C^*$) bleibe konstant, dann bleiben die Dreiecke $PC'\mathfrak{P}$ und $P^*C^*\mathfrak{P}^*$ ähnlich.

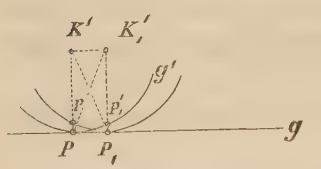
Bei der Abrollung der Kreise dreht sich die veränderliche Gerade $P^*\mathfrak{P}^*$ um die Gerade P^*P. Ergänzt man die beiden Geraden zu dem Parallelogramm $P^*\mathfrak{P}^*\mathfrak{P}_1 P$, so bildet $P\mathfrak{P}_1$ einen konstanten Winkel ($= C'CC^*$) mit $P\mathfrak{P}$ und steht in konstantem Größenverhältnifs zu $P\mathfrak{P}$. Der Punkt $\mathfrak{P}_1$ liegt mithin immer ähnlich zu $P\mathfrak{P}$. Dafs der Punkt $\mathfrak{P}_1$ dabei eine Cykloide beschreibt, geht aus Folgendem hervor: Man kann den Punkt $\mathfrak{P}_1$ seine Bahn auch als Eckpunkt eines Gelenkparallelogramms mit konstanten Seitenlängen beschreiben lassen, von welchem zwei Seiten mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um den Punkt C rotiren. Trägt man auf C^*C' die Strecke $C^*C_1' = PP^*$ ab, so erhält man das Gelenkparallelogramm $C^*\mathfrak{P}^*\mathfrak{P}_1 C_1'$, dessen Seiten bei gleichförmiger Rollung der Rollkreise (C^* und C') gleichförmige Winkelgeschwindigkeit besitzen. Die Grade CC_1' hat dann gleichfalls eine konstante Drehgeschwindigkeit. Ergänzt man zu dem Parallelogramm $CC_1'\mathfrak{P}_1 C_1''$, so rotiren die Seiten CC_1' und CC_1'' gleichförmig, folglich beschreibt der Punkt $\mathfrak{P}_1$ eine Cykloide.

Bestimmung geometrischer Eigenschaften der Ellipse.

Mittels einer der beiden gefundenen Ellipsen der Wendetangentenpole läfst sich die Fläche der Bahnellipse aus den Bestimmungsstücken der Cykloide berechnen. Die Berechnung ist eine Anwendung des folgenden Satzes, dessen Beweis sofort folgt:

> Bei der Rollung einer Kurve auf einer Geraden ist die von der Geraden und dem Ort der Wendekreishauptpunkte eingeschlossene Fläche von dem doppelten Inhalt der Fläche, welche von der rollenden Kurve und ihrer Evolute eingeschlossen wird.

Ist g eine feste Gerade, auf der die Kurve g' rollt, so ist der Krümmungsmittelpunkt K' der Kurve g' der Wendekreishauptpunkt, wie schon gezeigt. Bei einer Elementardrehung der Kurve g' bewegt sich der Punkt K' auf einer Parallelen zur festen Geraden nach K_1'; der augenblickliche Drehpunkt, der Pol P, schreitet während dessen auf der festen Geraden um dasselbe Stück weiter nach P_1 und auf der beweglichen Kurve nach P_1'. Die Geraden PK' und P_1K_1' stehen senkrecht auf der Geraden g und sind als Krümmungsradien desselben Bogenelements der rollenden Kurve nur um eine unendlich kleine Größe zweiter Ordnung verschieden; mithin kann der von zwei Ordinaten, von der festen Geraden und von einem Element der Kurve der Wendetangentenpole, eingeschlossene Elementarstreifen $PK'K_1'P_1$ als Rechteck betrachtet und sein Inhalt gleich $PP_1 \cdot PK'$ gesetzt werden. Der Inhalt des Elementardreiecks $K'PP_1'$ ist gleich



$\frac{1}{2} PK' \cdot PP_1'$. Weil aber $PP_1' = PP_1$, kann der Inhalt auch gleich $\frac{1}{2} PP_1 \cdot PK'$ gesetzt werden. Dies Elementardreieck ist aber von zwei aufeinanderfolgenden Krümmungsradien und einem Kurvenelement begrenzt; es ist ein Differential der zwischen der Kurve und ihrer Evolute eingeschlossenen Fläche, wie das Elementarrechteck das Differential der Fläche der Wendekreishauptpunktkurve ist. Diese Differentiale stehen im Verhältnifs 1 : 2, daher auch die Flächen selbst.

Weil nun im vorliegenden Falle die von der Kurve der Wendekreishauptpunkte eingeschlossene Fläche ähnlich derjenigen der betrachteten Bahnkurve ist, kann man den angegebenen Satz zur Quadrirung der letzteren benutzen.

Die Evolute der Cykloide ist eine konzentrische, um eine halbe Phase verschobene Cykloide, die im Verhältnifs $\frac{r'' - r'}{r'' + r'}$ zu jener steht. Der Inhalt der Fläche zwischen der Cykloide und ihrer Evolute ist gleich der Differenz der beiden Cykloidenflächen.

$$I^* = r' r'' \frac{r' + r''}{r'' - r'} \pi - r' r'' \frac{r'' - r'}{r'' + r'} \pi$$

$$= 4 \frac{r'^2 r''^2}{r''^2 - r'^2} \pi.$$

Der Inhalt der halben Ellipse der Wendekreis-Hauptpunkte ist hiernach $8\pi \frac{r'^2 r''^2}{r''^2 - r'^2}$. Das Verhältnifs der Achsen der Bahnellipse zu dieser Ellipse ergab sich aus den früheren Gleichungen als $a^2 : a^2 - b^2 = (r' + r'')^2 : 4 r' r''$. Daraus folgt als Inhalt der ganzen Bahnellipse

$$I = \frac{16 r'^2 r''^2 \pi}{r''^2 - r'^2} \cdot \frac{(r' + r'')^4}{16 r'^2 r''^2}$$

$$= \frac{(r' + r'')^3}{r'' - r'} \pi = ab\pi.$$

Die Konstruktion des Krümmungsmittelpunkts der Ellipse soll mit Hülfe des Wendekreises und des Savary'schen Satzes durchgeführt werden. Bezeichnet man den Polabstand $C\mathfrak{P}$ des Punktes C mit m, die Strecke CW mit w und die Potenz des Punktes C in Bezug auf den Wendekreis mit p, so hat man für den Krümmungsradius

$$\varrho = \frac{m^2}{w}$$

$$m \cdot w = p^2$$

$$\varrho = \frac{m^3}{p^2}.$$

Die Potenz p^2 ist aber eine konstante, wie sich folgendermaßen beweist. Es heiße für den Augenblick c die Entfernung des Wendekreiscentrums von Punkt C und der Wendekreisradius ϱ^*, dann ist

$$p^2 = c^2 - \varrho^{*2}$$

$$c^2 = (r'' - r')^2 \sin^2 \varphi + [(r'' + r') \cos \varphi - \varrho^*]^2$$

$$\varrho^{*2} = \frac{2 r' r''}{r' + r''} \cos \varphi$$

$$p^2 = (r'' - r')^2.$$

Die Potenz des die Ellipse beschreibenden Mittelpunkts der Cykloide in Bezug auf den Wendekreis ist gleich dem Quadrat des Grundkreisdurchmessers der Cykloide, d. h. der Grundkreis der Cykloide und der Wendekreis schneiden sich immer senkrecht.

$$\varrho = m \frac{m^2}{(r'' - r')^2}.$$

Um ϱ nach diesem Ausdruck zu konstruiren, verwendet man am bequemsten die sog. Zickzackkonstruktion. Man konstruirt an der Normalen einen Winkel vom Cosinus $\frac{r'' - r'}{m}$ und mit einem Schenkel gleich m, errichtet die Senkrechte im Endpunkt dieses Schenkels und eine zweite Senkrechte im Schnitt dieser mit dem zweiten Schenkel; der Schnitt der letzteren mit der Normalen giebt den Krümmungsmittelpunkt. Den Winkel vom Cosinus $\frac{r'' - r'}{m}$ findet man, wenn man vom Momentanpol $\mathfrak{P}$ die Tangente an den Grundkreis der Cykloide zieht und den Tangenzpunkt mit dem Grundkreiscentrum verbindet.

Wenn man beide Tangenten und auch die beiden zugehörigen Radien zieht, welche mit der Ellipsennormalen gleiche Winkel bilden und mittels mehrfacher Anwendung des pythagoräischen Satzes die Abstände der beiden Schnittpunkte dieser Radien vom Ellipsencentrum ausdrückt, so findet man diese gleich und konstant gleich $2\sqrt{r' r''}\frac{r' + r''}{r'' - r'}$. Diese Schnittpunkte sind die Brennpunkte.

Dafs die Summe der Brennstrahlen gleich dem Ellipsendurchmesser ist, sieht man folgendermaßen: Man denkt sich die große Achse und die Brennstrahlen als Stäbe ausgeführt; diese seien im Punkte C gelenkig verbunden und durch die Punkte $F F'$ (mittels Prismen) geführt (Fig. 4); die elliptische Bewegung werde durch Rollen der Cykloide erzeugt, deren Grundkreiscentrum mit dem Gelenkpunkt der zwei durch die Brennpunkte geführten Stäbe zusammenfällt.

Nun denke man sich die elliptische Bewegung umgekehrt, d. h. die Cykloide fest und die Achse MO auf ihr rollend. Die Punkte F und F' besitzen dann gewisse Geschwindigkeiten, die proportional den Abständen $\mathfrak{P}F$ und $\mathfrak{P}F'$ sind, $\mathfrak{P}F$ und $\mathfrak{P}F'$ können deshalb als die lothrechten Geschwindigkeiten der Punkte F und F' angesehen werden. Zerlegt man die wirkliche Geschwindigkeit in zwei Komponenten, von welchen eine auf den Punkt C zu gerichtet ist, die andere senkrecht dazu, so ist die Normale aus $\mathfrak{P}$ auf die Richtung FC ($F'C$) die Komponente der lothrechten Geschwindigkeit in dieser Richtung, das von der Normalen abgeschnittene Stück die zweite lothrechte Komponente.

Die Länge dieser Normalen drückt hiernach die Geschwindigkeit aus, mit welcher der Punkt F (F') sich dem Punkt C nähert; dies ist die Geschwindigkeit des Wachsens der Strecke CF (CF'), die Streckungsgeschwindigkeit. Aus der Gleichheit der Normalen von dem Punkte $\mathfrak{P}$ auf CF und CF' folgen gleiche Streckungsgeschwindigkeiten; dafs die Streckungsgeschwindigkeiten umgekehrtes Vorzeichen haben, ergiebt die unmittelbare Anschauung. Daraus folgt, dafs die Summe der beiden Strecken CF und CF' bei dieser Bewegung konstant bleibt. Dafs die Summe gleich der großen Achse ist, folgt aus der Grenzlage. Diese Verhältnisse aber ändern sich durchaus nicht,

wenn man die Bewegung wieder umkehrt, d. h. MO wieder zur festen Achse macht, auf welcher die Cykloide rollt und eine Ellipse beschreibt, deren Brennstrahlen CF und CF'' sind.

Die angegebene Konstruktion des Krümmungsradius würde für die Scheitel versagen (für die Hauptscheitel bei der Epicykloide, die Nebenscheitel bei der Hypocykloide), weil der Schnittpunkt der Achse und der Normalen konstruktiv nicht mehr bestimmbar ist. Hier ergiebt die Betrachtung der Bewegung selbst, dafs der Grundkreisdurchmesser der Krümmungsradius ist. Für die Punkte der Polbahntangente ist nämlich der Polabstand der Krümmungsradius, und beim Beginne der Bewegung geht ja die feste Polbahntangente MO durch den beschreibenden Punkt, den Scheitel. Weiter aber ist zu bemerken, dafs der Krümmungsradius der beweglichen Polbahn in diesem Augenblicke unendlich klein ist, dafs also der Pol bei einer Elementardrehung nur um eine unendlich kleine Größe zweiter Ordnung auf der Polbahn weiter rückt. In Folge dessen mufs der Krümmungskreis im Scheitel die Ellipse mehr wie dreipunktig berühren, d. h. diese Punkte haben stationäre Krümmung.

Die Grundkreisradien der Epicykloide und der Hypocykloide sind

$$\varrho_a = r'' - r' = \frac{b^2}{a}$$

$$\varrho_b = r_1'' + r_1' = \frac{a^2}{b}.$$

Die punkt- und tangentenweise Konstruktion der Evolute ist durch die Bestimmung des Krümmungsradius gegeben. Symmetrische Gleichungen in rechtwinkligen Koordinaten kann man mit Benutzung der Hypocykloiden- und Epicykloiden-Bestimmungsstücke herstellen. Die Ordinate ist

$$\begin{aligned} y^* &= (\varrho - m)\sin\varphi \\ &= m\left(\frac{m^2 - p^2}{p^2}\right)\sin\varphi \\ &= \sqrt{r'^2 + r''^2 + 2r'r''(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi)}\,\frac{2\cos^2\varphi\, r'\, r''}{(r'' - r')^2}\sin\varphi \end{aligned}$$

die Abscisse: $x^* = \sqrt{r_1'^2 + r_1''^2 + 2r_1'r_1''(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi}\,\frac{2\sin\varphi\cos\varphi\, r_1'\, r_1''}{r_1' + r_1''} - \cos\varphi.$

Der Ort der Krümmungsmittelpunkte im beweglichen System. (Fig. 6.)

Um zu einer Gleichung der Krümmungsmittelpunktkurve im beweglichen System zu kommen, hat man in der Polargleichung der Cykloide den Radiusvektor als Funktion des Krümmungsradius der Ellipse auszudrücken.

Wenn man in die gewöhnliche Form der Cykloidengleichungen in rechtwinkligen Koordinaten die Werthe der beiden Rollkreisradien r' und r'' einsetzt, erhält man:

$$x = r''\cos\frac{r'}{r'' \pm r'}\varphi - r'\cos\frac{r''}{r'' \pm r'}\varphi$$

$$y = r''\sin\frac{r'}{r'' \pm r'}\varphi - r'\sin\frac{r''}{r'' \pm r'}\varphi$$

$$R^2 = r''^2 + r'^2 - 2r'r''\cos\varphi,$$

φ bedeutet hier den Wälzungswinkel im rollenden Kreise gemessen.

Oben war für die Länge des Krümmungsradius gefunden worden

$$\varrho = \frac{R^3}{p^2}$$

Diese Werthe für R und p eingesetzt, ergeben:

$$\varrho^2 = \frac{(r''^2 + r'^2 - 2\,r'\,r''\cos\varphi)^3}{(r'' + r')^4},$$

ω sei der Winkel, welchen der Radiusvektor ϱ mit der x-Achse bildet; dann ist:

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{y}{x} = \frac{r''\sin\frac{r'}{r''\pm r'}\varphi - r'\sin\frac{r''}{r''\pm r'}\varphi}{r''\cos\frac{r'}{r''\pm r'}\varphi - r'\cos\frac{r''}{r''\pm r'}\varphi}.$$

Die Kurve der Krümmungsmittelpunkte der Ellipse im beweglichen System kann man punktweise konstruiren, indem man die Punkte der Evolute in das bewegliche System zurückträgt bezw. während der Bewegung im beweglichen System fest legt.

Zur Konstruktion der Tangenten werde wieder ein schematischer Mechanismus gebildet. Die zu Grunde liegende Konstruktion des Krümmungsradius der Ellipse ist folgende. Man konstruirt an die Normale $C\mathfrak{P}$ (Fig. 4) ein rechtwinkliges Dreieck, dessen eine Kathete (5) ein Radius des Cykloidengrundkreises und dessen andere Kathete die zugehörige Tangente ist, welche die Normale auf der Achse schneidet. Durch Ziehen der Senkrechten 3′ und 4 nach Fig. 4 erhält man das Krümmungscentrum als Schnitt von $C\mathfrak{P}$ (3) und 4. Der schematische Mechanismus nach Fig. 3 besteht aus Prismen- und Cylinderpaaren und ist aus der Zeichnung erkenntlich, wenn noch zugefügt wird, dafs das Glied 1, die Epicykloide, durch irgend welche Mittel zum Rollen auf Glied 2 gezwungen wird und dafs das Cylinderpaar, welches das Prisma 5′ mit dem Prisma 3 (bezw. 3′) vereinigt, gezwungen ist, in dem Pol dieser Rollung zu bleiben.

Wird das Glied 2 festgestellt, so beschreibt Punkt C eine Ellipse und der Schnittpunkt von 3 und 4, d. h. das diese beiden Prismen verbindende Cylinderpaar die Evolute.

Kehrt man die Bewegung um und stellt den Mechanismus auf das Glied 1, so umhüllt die Ellipse den Punkt C, und der Punkt, der vorher die Evolute beschrieb, beschreibt nun die Kurve der Ellipsenkrümmungscentren der Ebene des Gliedes 1, d. h. im vorher beweglichen System, in der Cykloidenebene.

Die Tangenten findet man aus dem Mechanismus durch Bestimmung der Pole 13, 14, 34.

Unmittelbar ist nur der Pol 12 gegeben. 13 liegt auf der Senkrechten zu 3 im Punkte C, weil dieser Punkt mit dem Gleitungspunkt von 3 zusammenfällt; außerdem gleitet der Punkt $\mathfrak{P}$ auf der Cykloide, die Normale derselben ergiebt also den zweiten Ort für 13.

Um Anhaltspunkte zur Bestimmung der Bewegung des Gliedes 4 zu gewinnen, von welchem noch gar kein Pol bekannt ist, dessen Bewegung aber durch die Führung

im Punkte F hinreichend bestimmt war, ist noch ein Glied 5 in den schematischen Mechanismus eingefügt worden, dessen Relativbewegung sowohl gegen Glied 1 als Glied 4 durch die Pole 15 und 45 gegeben ist. Zu diesem Zwecke erinnere man sich an den Satz, der oben auch bewiesen wurde, dafs die Normale aus dem Punkte $\mathfrak{P}$ auf die Brennstrahlen immer dasselbe Stück, den Grundkreisradius der Cykloide, auf diesen abschneidet.

Setzt man also einen Schieber 5 auf den Stab 4, lenkt ihn im Punkte C an und schweift in der Entfernung $r'' - r'$ senkrecht den Stab 5′ ab, so geht dieser dann immer durch den Punkt $\mathfrak{P}$. Der Pol 15 fällt mit C zusammen; der Pol $45\,\infty$ ist ebenfalls bekannt. Die Senkrechte auf 5′ im Punkte $\mathfrak{P}$ giebt einen Ort für den Pol 35, da $\mathfrak{P}$ ja fest auf 3 liegt; ein zweiter Ort wird durch die Gerade $15 - 13$ gegeben. Die Verbindungslinie des Pols 35 und $45\,\infty$ steht senkrecht zur Geraden 4′ (5); auf ihr liegt der Pol 34, für welchen ein zweiter Ort in der Senkrechten auf 3′ im Punkte 44′ gegeben ist. Auf der Verbindungslinie von 34 und 13 liegt endlich noch der dritte gesuchte Pol 14, für welchen ein zweiter Ort in der Senkrechten auf 4′ im Punkte C gegeben ist. Die weitere Konstruktion ist bekannt. Fig. 6 zeigt die Gestalt der Kurve.

Mechanismenschaaren.

Wie man algebraisch eine Kurve durch eine Gleichung, geometrisch durch eine Konstruktion, phoronomisch als eine Punktbahn durch eine Bewegung definiren kann, kann man sie kinematisch durch einen Mechanismus definiren, welcher sie zu verzeichnen im Stande ist. Dem entsprechend wird eine Kurvenschaar oder deren Umhüllende durch eine Mechanismenschaar definirt werden können. Diese Schaar kann man noch näher bestimmen durch Bedingungen, dafs z. B. Glieder gemeinsam oder zwangläufig verbunden seien. Dafs sich hieraus eine recht anschauliche und einfache Bestimmungsweise ergeben kann, möge die Anwendung dieser neuen Methode auf die oben definirte Ellipsenschaar und Cykloidenschaar zeigen.

Wenn man zwei Seiten eines Parallelogramms gleich schnell und in entgegengesetzter Richtung um einen Punkt rotiren läfst, so beschreibt der den beiden anderen Seiten gemeinschaftliche Punkt eine Ellipse. Eine Schaar solcher Gelenkparallelogramme kann zu dem genannten Zwecke gut verwendet werden. Da die um einen festen Punkt sich drehenden Seiten dieser Gelenkparallelogramme gleichförmige Drehgeschwindigkeit haben, kann man sie je zu einem starren Glied vereinigen. Hat man in den zwei so entstehenden, um einen festen Punkt rotirenden Gliedern die 2 Kurven bestimmt, welche die Endpunkte der Parallelogrammseiten bilden, so ist damit die ganze Parallelogrammschaar bestimmt.

In Fig. 5 sei OA die gemeinschaftliche Halbachse der Ellipsenschaar, welche durch die Ellipsen gleich gerichteter Wendepunkte gebildet wird, und die Sehnen $O\mathfrak{P}_1$ $O\mathfrak{P}_2 - O\mathfrak{P}_n$ des Kreises über OB seien die dazu konjugirten Halbachsen. Nach der Rytz'schen Konstruktion*) findet man die beiden Cardankreispaare und die Haupt-

*) Siehe z. B. Burmester a. a. O. p. 38.

achsen aus zwei konjugirten Durchmessern folgendermaßen: Man zieht $O\mathfrak{P}'$ senkrecht und gleich $O\mathfrak{P}$, halbirt $\mathfrak{P}'A$ (im Punkte M), dann ist AM der Halbmesser des einen und OM der Halbmesser des zweiten Rollkreises, welche in doppelt so großen festen Kreisen rollend die Ellipse erzeugen. Die Hauptachsen der Ellipse erhält man, wenn man um den Punkt M den Kreis mit OM als Radius schlägt und die Schnittpunkte desselben mit dem Durchmesser $AM\mathfrak{P}'$ mit dem Centrum O verbindet.

Alle Punkte $\mathfrak{P}'$ liegen auf einem Kreise vom Durchmesser OB; folglich liegen alle Punkte M auf einem Kreise vom halben Durchmesser.

Die Radien der 2 Rollkreise sind gleich den Seiten des Parallelogramms, von welchem zwei Seiten entgegengesetzt gleich schnell rotiren müssen, um den freien Eckpunkt eine Ellipse beschreiben zu lassen. Dies läfst sich leicht aus Fig. 2 ersehen. Der Punkt P beschreibt als Punkt der beiden Rollkreise um C' und C'' oder als Punkt der beiden Gleitgeraden $G_a' G_b'$ und $G_a'' G_b''$ die gezeichnete Ellipse. Dabei ist

$$a = PG_a' = PG_a'' \text{ und } PG_b' = PG_b'' = b.$$

Die Rollkreisradien sind $\frac{a+b}{2}$ und $\frac{a-b}{2}$.

Daraus folgt, dafs:

$$PC'' = \frac{a-b}{2} \qquad PC' = \frac{a+b}{2}$$

und dafs folglich $CC'PC''$ ein Parallelogramm ist.

Ein solches Parallelogramm nun läfst sich auch durch die hier gefundenen Rollkreisradien konstruiren, indem man aus den Punkten O und A (Fig. 5) Linien parallel zu OM und AM zieht. Man erhält so den vierten Eckpunkt des Parallelogramms M'.

Da die Strahlen OM', $OM_1' \ldots OM_n'$ gleich und parallel den Strahlen AM, $AM_1 \ldots AM_n$ sind, müssen die Punkte $M' \ldots M_n'$ auch auf einem Kreise liegen, welcher $\frac{OB}{2} = \frac{b}{2}$ zum Durchmesser hat. Die Parallelogrammschaar, welche die oben definirte Ellipsenschaar erzeugt, ist durch 2 gleiche Kreise bestimmt, welche die Orte für die Endpunkte der um das Centrum rotirenden Seiten bilden.

Wenn a die gemeinschaftliche Ellipsenhalbachse ist, so sind die Kreisdurchmesser gleich $\frac{b}{2}$, die Abstände der Kreiscentren vom Rotationscentrum $\frac{a+b}{2}$ und $\frac{a-b}{2}$. Die zusammengehörigen Punkte auf den Kreisen sind um 180° entfernt, wenn die Verbindungslinien ihrer Centren mit dem Ellipsencentrum als Nullachsen angenommen werden.

Die oben definirte Cykloidenschaar kann analog der Ellipsenschaar durch eine Gelenkparallelogrammschaar bestimmt werden, deren um einen festen Punkt rotirende Seiten nur zwei verschiedene Winkelgeschwindigkeiten zeigen, so dafs die Seiten gleicher Winkelgeschwindigkeiten wieder zu einem starren Glied verbunden und die Kurve der kreisbeschreibenden Endpunkte der Parallelogrammseiten in diesen gefunden werden können. Zu diesem Zwecke müssen von den Punkten C' C_1' $C_2' \ldots$ und C'' C_1'' $C_2'' \ldots$ der Fig. 7 diejenigen herausgesucht werden, deren zugehörige Punkte $\mathfrak{P}_1$ immer auf dem Kreis über dem Krümmungsradius der rollenden Cykloide liegen.

Da die gesuchte Kurve der Punkte $C' C_1' \ldots$ eine unveränderliche ist, so kann sie bei einer beliebigen, bequemen Lage des Kreises um C' bestimmt werden. Es wird die-

jenige gewählt, bei welcher der Punkt $\mathfrak{P}$ den Scheitel der Cykloide beschreibt (Fig. 8). In diesem Falle degeneriren die Dreiecke $\mathfrak{P} C' P$, $\mathfrak{P}_1 C_1' P$, $\mathfrak{P}_2 C_2' P \ldots$ (Fig. 7) in Gerade, auf deren Mitte die Punkte $C'\ C_1'\ C_2' \ldots$ liegen. Diese Punkte liegen mithin auf einem Kreis, welcher den halben Durchmesser des größten Wendekreises zum Durchmesser hat. Aus der Gleichheit der Strecken $PC' \ldots PC_n'$ und $CC'' \ldots C_n''$ und aus ihrer Parallelität folgt, dafs die Punkte $C''\ C_1''\ C_2'' \ldots$ auf einem gleichen Kreise liegen. Der Durchmesser ist aber

$$d = \frac{2\,r'\,r''}{r' + r''}.$$

Der Kreis der Punkte $C'\ C_1' \ldots$. geht durch das Rollkreiscentrum C', folglich ist der Abstand seines Centrums vom Grundkreiscentrum C

$$c' = r'' - \frac{r'\,r''}{r' + r''} = \frac{r''^2}{r' + r''}.$$

Der Abstand des Kreises der Punkte $C''\ C_1'' \ldots$ ergiebt sich aus

$$c'' = \frac{r'^2}{r' + r''}.$$

Bei dem in Fig. 8 als Beispiel gewählten Falle ist $r'' = 3\,r'$, es sind demnach die Abstände

$$c' = \frac{9}{4}\,r' \qquad c'' = \frac{1}{4}\,r'.$$

Um die Art der durch die einzelnen Parallelogramme erzeugten Cykloiden zu ermitteln (ob gespitzt, gedehnt oder verschlungen), ist es nöthig, das Verhältnifs der betreffenden Parallelogrammseiten festzustellen. Diese Verhältnisse sind aber gleich $CC'_{(1,2\ldots n)} : PC'_{(1,2\ldots n)}$ und sind unter sich alle gleich. Es wird nämlich die Strecke CP durch die Punkte C' und $C_1{}^*$ (Fig. 8) harmonisch im Verhältnifs $r' : r''$ getheilt, da

$$CP = r'' - r'$$
$$CC' = r''$$
$$CC_1{}^* = \frac{r'' - r'\,r''}{r' + r''} = r''\,\frac{r'' - r'}{r'' + r'}$$

folglich:
$$CC' : PC' = r'' : r'' - (r'' - r')$$
$$= r'' : r'$$

und
$$CC_1{}^* : PC_1{}^* = r''\,\frac{r'' - r'}{r'' + r'} : r'' - r' - r''\,\frac{r'' - r'}{r'' + r'}$$
$$= r'' : r' \quad \text{ist.}$$

Schlägt man über $C'\ C_1{}^*$ als Durchmesser einen Kreis, so haben nach einem bekannten Satze alle Punkte der Peripherie gleiches Abstandsverhältnifs von den Punkten C und P. Eines der Gelenkparallelogramme beschreibt die Rollcykloide, folglich müssen die Winkelgeschwindigkeiten umgekehrt proportional den Seitenlängen sein, folglich beschreiben alle übrigen Gelenkparallelogramme $(CC_{(n)}'\ \mathfrak{P}_{(n)}\ C_{(n)})$ gleichfalls gespitzte Cykloiden. In Fig. 8 sind drei solche verzeichnet.

Um die Cykloide zu ermitteln, deren Punkte Bahnen beschreiben, welche einen Wendepunkt enthalten, dessen Normale eine vorbestimmte Richtung hat, kann man wieder von der Lage der Fig. 8 ausgehen.

Man trägt den Winkel α, welchen die Normale mit der geraden Polbahn bilden soll, an $\mathfrak{P}C$ in $\mathfrak{P}$ an. Der Schnitt des zweiten Winkelschenkels mit dem Kreis $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1 \ldots \mathfrak{P}_n$ ist dann ein Punkt dieser Cykloide und bestimmt das zugehörige Parallelogramm.

Wenn von einem Punkte des beweglichen Systems die Wendepunkte seiner Punktbahn und ihre Richtungen angegeben werden sollen, so mufs er als Schnitt zweier der bezeichneten Cykloiden gegeben sein.

Bei der Bewegung der Parallelogramme befinden sich die beschreibenden Punkte immer auf einem Kreis (dem Wendekreis) und gehen gleichzeitig durch die Spitzen der Rollcykloide. Diese ist die eine Einhüllende der Cykloidenschaar. Auf dem anderen Theil der Einhüllenden liegen alle Spitzen der Cykloiden. Für die Bahnen der Punkte dieses Theils der Einhüllenden fallen die zwei Wendepunkte zusammen in einen Undulationspunkt. Um also einen Undulationspunkt bestimmter Richtung zu konstruiren, hat man die Cykloide der Wendepunkte dieser Richtung bis zu ihren Spitzen zu verfolgen. Der eigenthümliche Umstand, dafs hier die Kurve der Undulationspunkte im beweglichen System der Ort dieser Spitzen ist, sich also punktweise konstruiren läfst, erlaubt so auch die punktweise Konstruktion der Kurve der Undulationspunkte im festen System. Man stellt den Mechanismus der Fig. 8 so ein, dafs z. B. der Punkt $\mathfrak{P}_2$ in die Spitze seiner Cykloide fällt. Der zugehörige Kreis $\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_1 \ldots$, welcher bei der Bewegung ja Wendekreis wird, läfst sich leicht konstruiren. Damit ist der zu dem Undulationspunkt gehörige Momentanpol gefunden und damit die Rücktragung des Undulationspunkts in's feste System ermöglicht.*)

*) Everett zeigte zuerst in dem Math. Quarterly Journal, Band 13 p. 61, die Bedeutung der zweiten Einhüllenden der Wendekreisschaar, als Ort der Undulationspunkte. Wirklich konstruirt wurde meines Wissens noch keine solche Kurve.

Druck von Leonhard Simion, Berlin SW.

Wirth, ueber elliptische Bewegung.

Fig. 1.

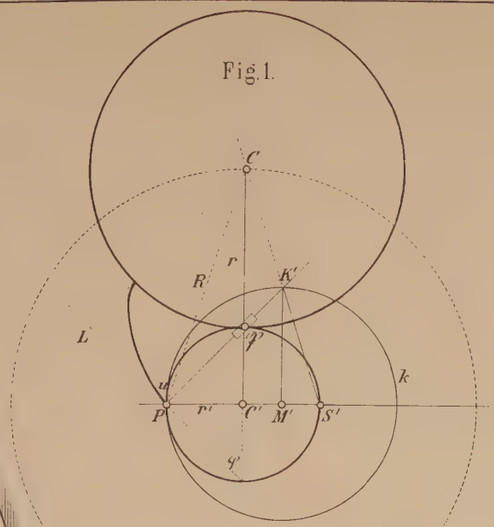


Fig. 2.

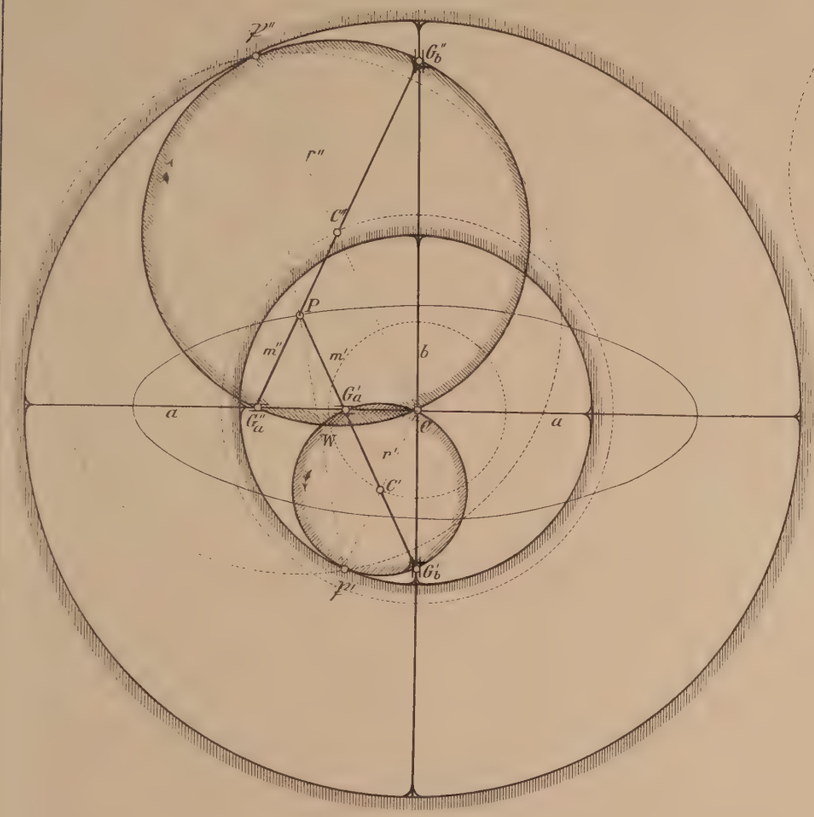


Fig. 3.

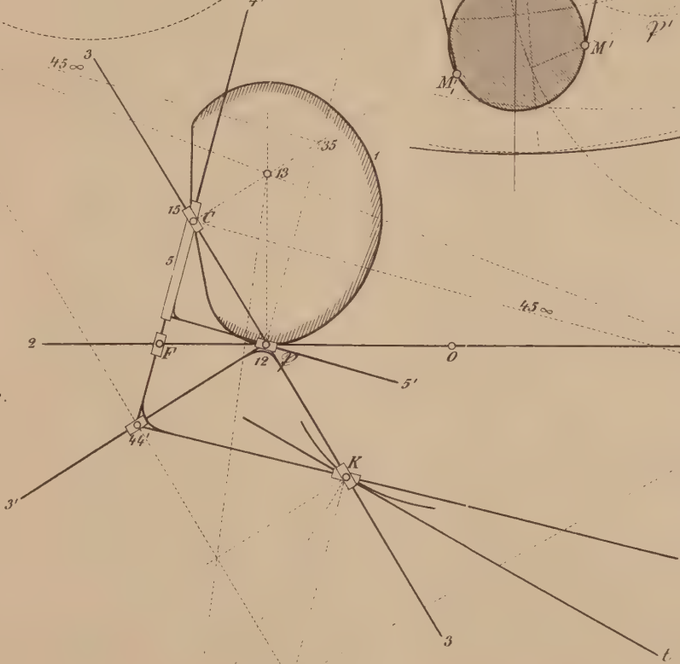
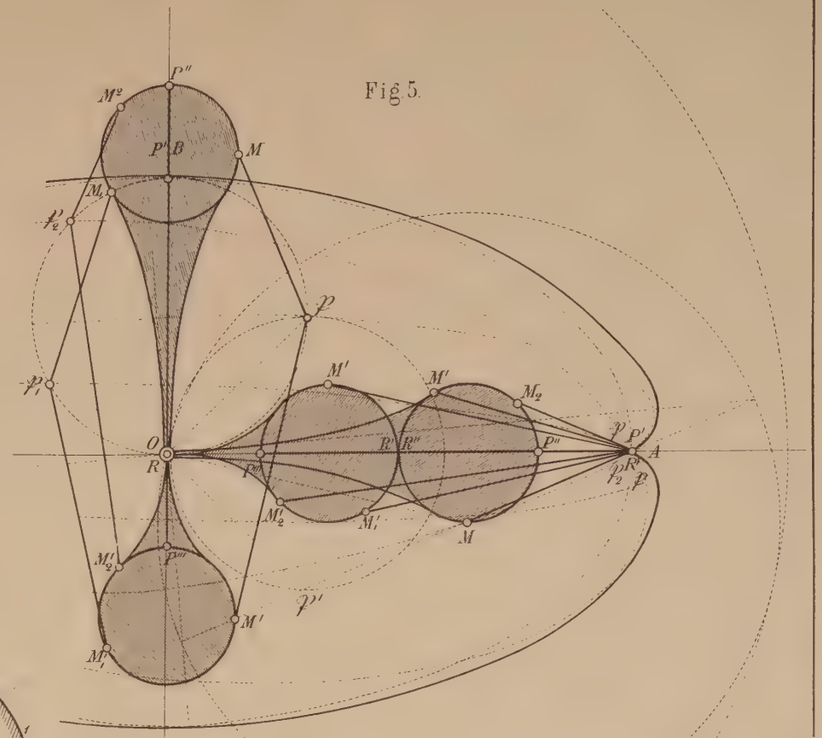


Fig. 4.

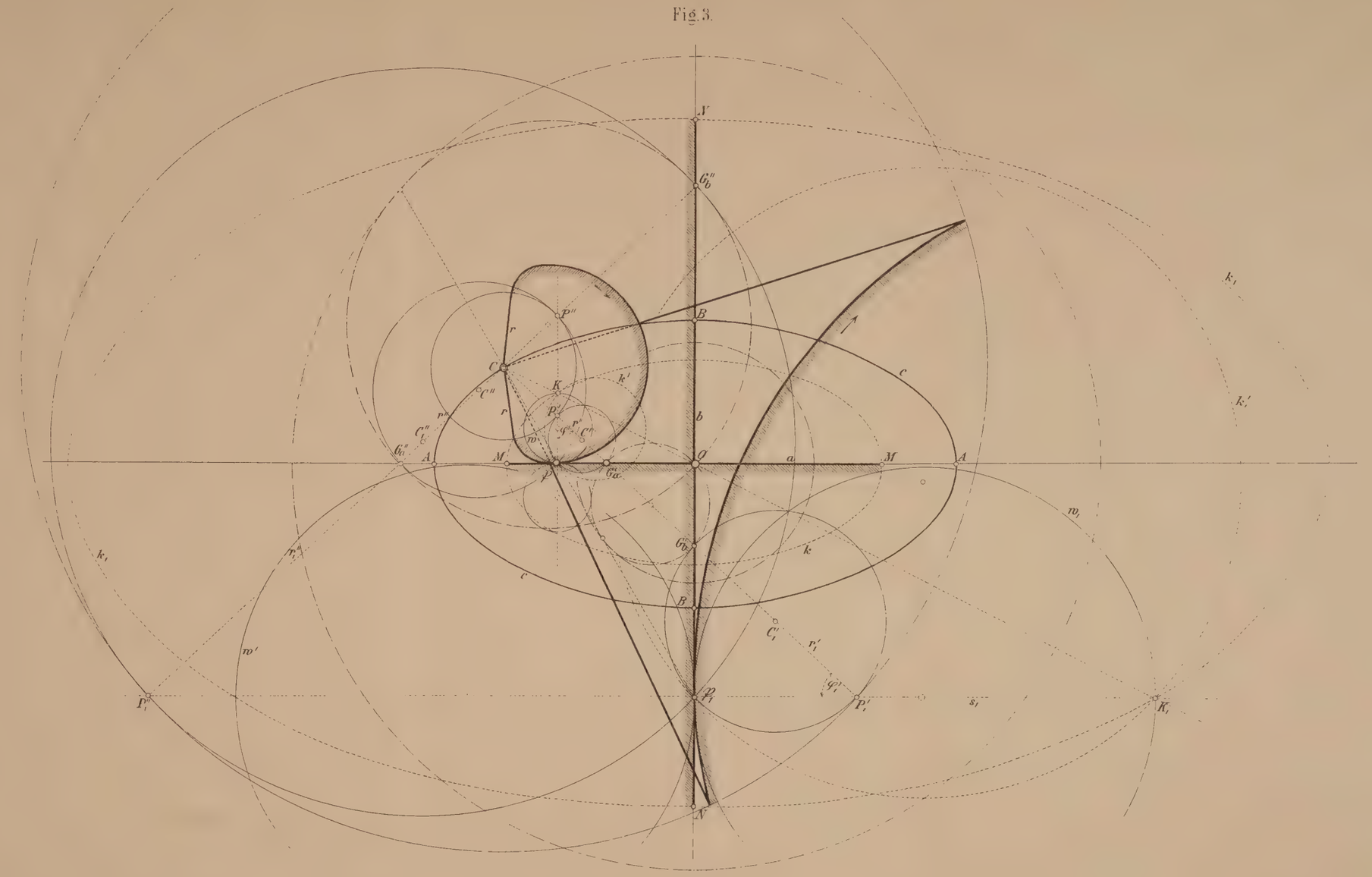
Fig. 5.



Lith u Druck v F Kayser in Berlin

Wirth, ueber elliptische Bewegung.

Fig. 3.



Wirth, ueber elliptische Bewegung.

Fig. 6.

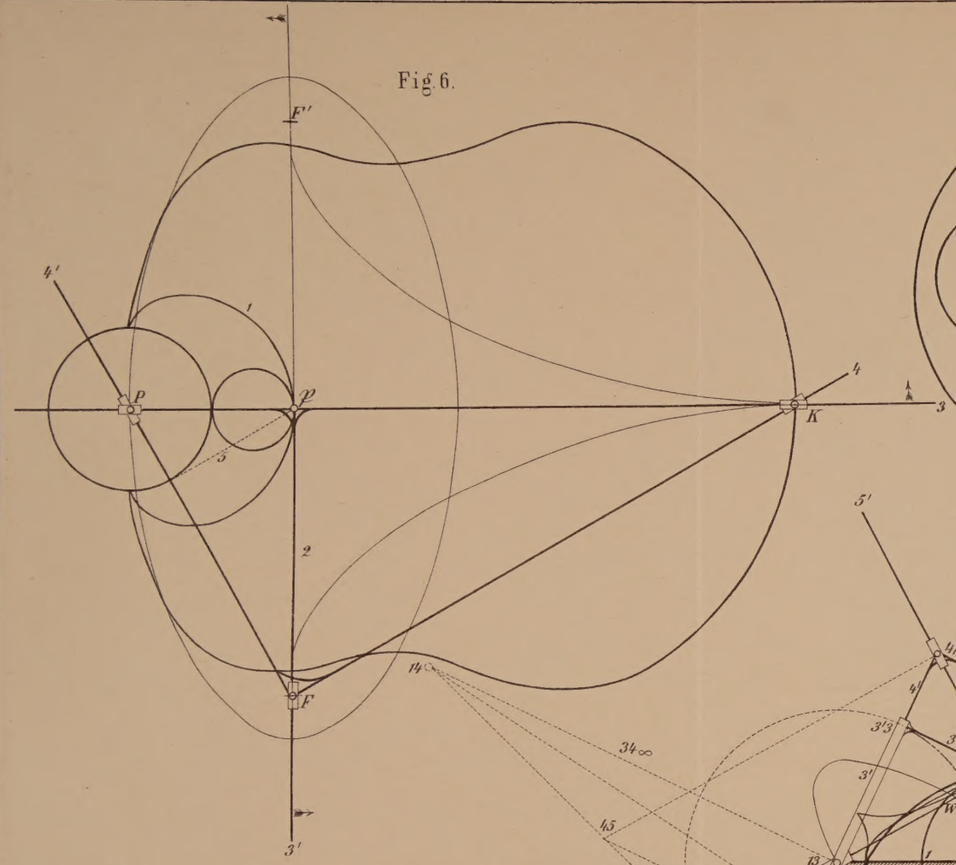


Fig. 7.

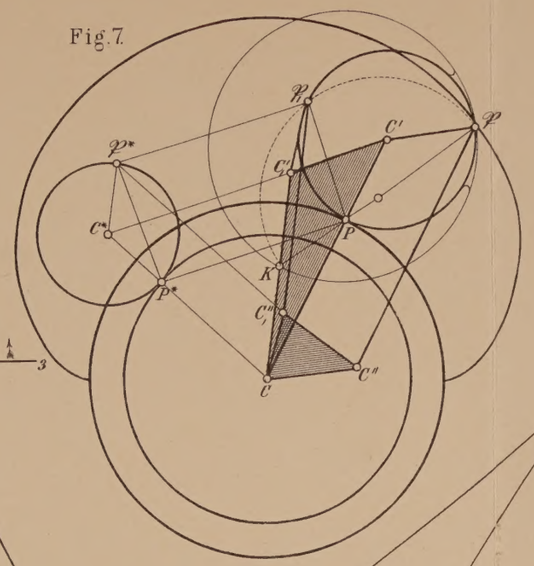


Fig. 8.

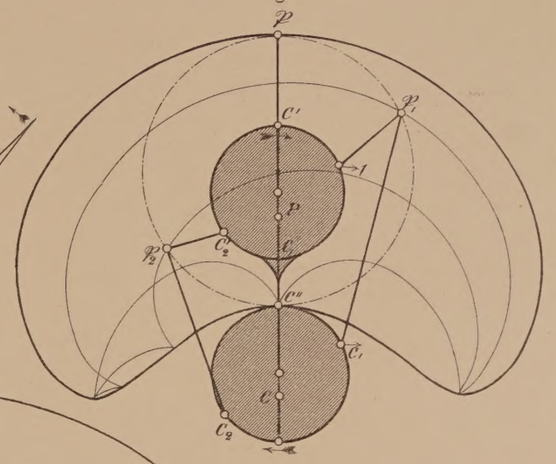
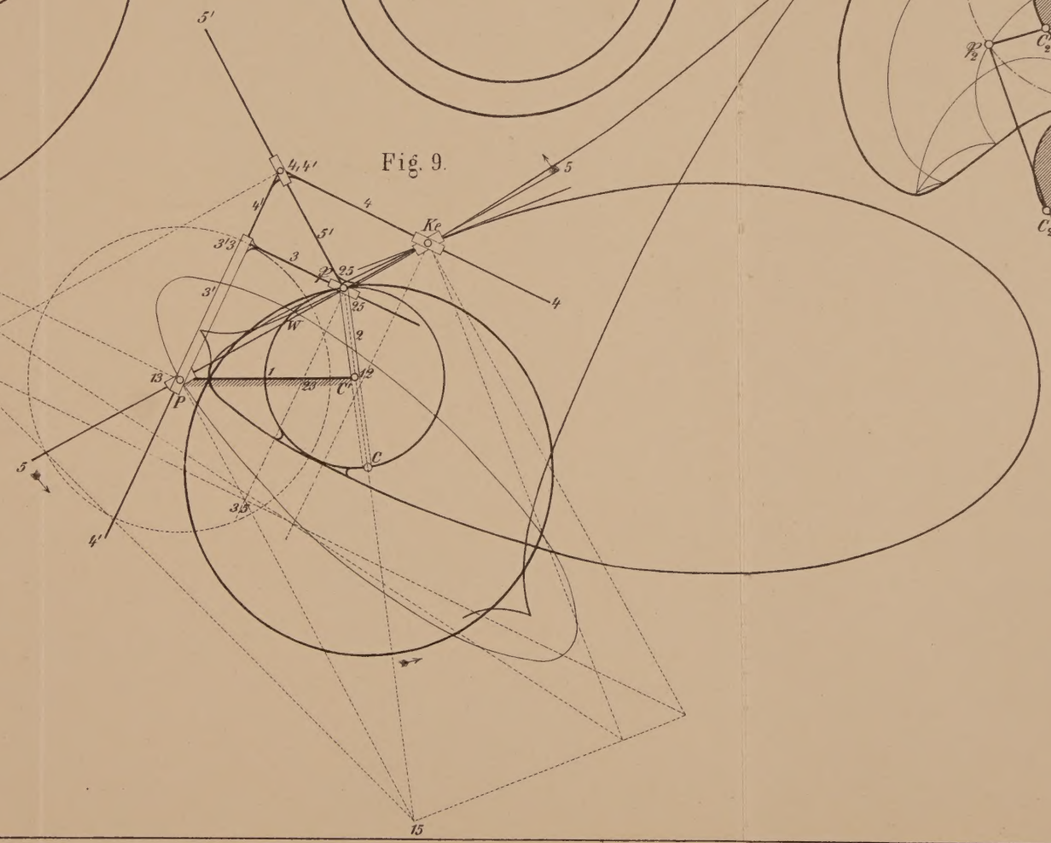


Fig. 9.



Lith. Anst. v. F. Kayser in Berlin.